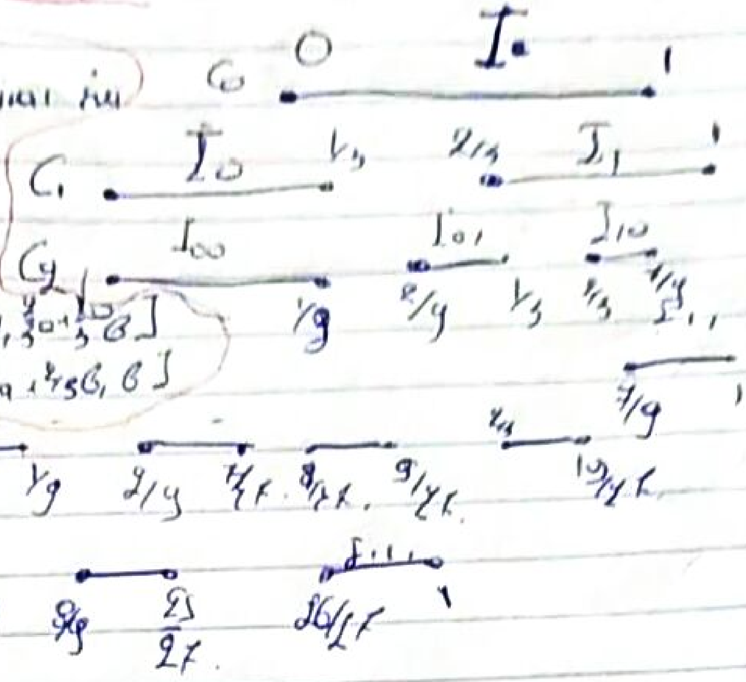
Τοπολογία 30/5/19

Το σύνολο του Cantor (Κάντορ)

Συμβολισμοί: Αν $J=[a,b]$ είναι ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ (όπου $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$) θα συμβολίζουμε $J_0=[a, a+\frac{b-a}{3}]=[a,\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b]$

$J_1=[a+\frac{2}{3}(b-a), b]=[\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b, b]$



Θέτουμε $C_0=I=[0,1]$

$C_1=I_0\cup I_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$

$C_2=I_{00}\cup I_{01}\cup I_{10}\cup I_{11}=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$

Επαγωγικά κατασκευάζουμε τα C_n, $n=0,1,2,\dots$ Κάθε C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών υποδιαστημάτων του με μήκος $\frac{1}{3^n}$ το καθένα.

Τι μήκος έχουν τα διαστήματα που διώχνουμε συνολικό.

$$\left(\frac{1}{3}\right)+2\frac{1}{3^2}+2^2\left(\frac{1}{3^3}\right)+2^3\left(\frac{1}{3^4}\right)+\dots=$$

$$=\sum^{n}\frac{2^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{2}{3}}{1-2/3}=1$$

Παρατηρούμε ότι $0\in C$ άρα $C\neq\emptyset$. Επιπλέον όλα τα σημεία που είναι άκρα διαστημάτων $I_{a_1\dots a_n}$ με $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n\in\{0,1\}$ βρίσκονται στο C.

$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$

Εφόσον καθε C_n είναι κλειστό το $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ κλειστό επίσης το C είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγής $[0,1]$ άρα είναι συμπαγής

- Το C είναι υπεραριθμήσιμο (και μάλιστα έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς)

Θέτουμε
$E = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) : a_i \in \{0,1\} \ \forall i \in \mathbb{N}\} =$

$= \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
Το E είναι υπεραριθμήσιμο (διότι $E \simeq P(\mathbb{N})$)
και $P(\mathbb{N})$ υπεραριθμήσιμο.

Ορίζουμε $\varphi : E \to C$ ως εξής:
αν $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in E$ και θεωρήσουμε τα σύνολα
$I_{a_1} \supset I_{a_1 a_2} \supset I_{a_1 a_2 a_3} \supset \dots \supset I_{a_1 \dots a_n} \supset I_{a_1 \dots a_{n+1}}$

Άρα η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ είναι μονοσύνολο.

Η φ είναι φθίνουσα ακολ. κλειστών συνόλων με
$diam(I_{a_1 \dots a_n}) = \frac{1}{3^n} \to 0$
Βρισκόμαστε σε πλήρη μ.χ.

Ορίζουμε $\varphi((a_1, a_2, a_3, \dots)) =$ το μοναδικό x για το οποίο $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a_1 \dots a_n} = \{x\}$
Η φ είναι 1-1.

Επομένως το C είναι υπεραριθμήσιμο.
σύνολο του Cantor

Ασκήσεις (Μετρικοί χώροι)

1) Έστω (X,ρ) μ.χ. ώστε για κάθε $x\in X$ $\exists\, \varepsilon_x$ ώστε η ανοιχτή μπάλα $B_\rho(x,\varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο.
Να δείξετε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοιχτό.

Λύση

Έστω $A\subseteq X$ τυχαίο. Θ.δ.ο. το A είναι ανοιχτό.
Έστω $x\in A$ (και αναζητούμε $\varepsilon>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon)\subseteq A$)
Από υπόθεση υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε η μπάλα $B_\rho(x,\varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο.

1η περίπτωση $B_\rho(x,\varepsilon_x)=\{x\}$
Θέτουμε $\varepsilon=\varepsilon_x$ έχουμε $B_\rho(x,\varepsilon)=B_\rho(x,\varepsilon_x)=\{x\}\subseteq A$

2η περίπτωση Η μπάλα $B_\rho(x,\varepsilon_x)$ περιέχει και άλλα σημεία εκτός του x άρα $B_\rho(x,\varepsilon_x)=\{x,x_1,x_2,\dots,x_n\}$

Θέτουμε $\varepsilon=\min\{\rho(x,x_i)\,/\,i=1,\dots,n\}$

Τότε $B_\rho(x,\varepsilon)=\{x\}\subseteq A$

2) $(X,\rho),(Y,d)$ μ.χ. Θέτουμε $Z=X\times Y$

Ορίζουμε $\sigma: Z\times Z\to\mathbb{R}$ με $\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\rho(x_1,x_2)+d(y_1,y_2)$
α) Ν.δ.ο. σ μετρική στο Z (προφανές) ✓
β) Αν (x_n) ακολ. στο X,
(y_n) ακολ. στο Y και $x\in X$, $y\in Y$ (ισχ. 1) ✓
Θ.δ.ο. $(x_n,y_n)\xrightarrow{\sigma}(x,y) \Leftrightarrow x_n\xrightarrow{\rho}x$ και $y_n\xrightarrow{d}y$

② Τοπολογία 30/5/19

Στο δεκαδικό σύστημα $x_i \in \{0,1,\dots,9\}$

$$0,x_1x_2x_3\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

Το σύνολο Cantor χαρακτηρίζεται όχι με τη δεκαδική αλλά με τη τριαδική αναπαράσταση ενός αρ. $x\in[0,1]$

Κάθε $x\in[0,1]$ γράφεται $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$

$a_i\in\{0,1,2\}$ $\quad x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$

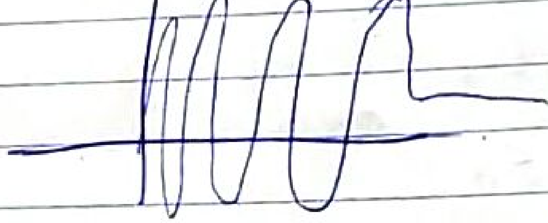
• Το σύνολο του Cantor αποτελείται από τα σημεία $x\in[0,1]$ για τα οποία υπάρχει μοναδική αναπαράσταση $x = 0,a_1a_2a_3\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ με $a_n\in\{0,2\}$ $\forall n$.

Οι συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου Cantor C είναι τα $\{x\}$ με $x\in C$.

[Με άλλα λόγια τα μόνα μη κενά συνεκτικά υποσύνολα του C είναι τα μονοσύνολα]

$S = A\cup B$ όπου $A=\{0\}\times[-1,1]$

$B=\{(x,\sin(\frac{1}{x})) \mid x>0\}$



B συνεκτικό

άρα και το $\bar{B}$ είναι συνεκτικό

όμως $\bar{B} = A\cup B = S$

άρα S συνεκτικό

Όμως το S δεν είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό

3) Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A, B \subset X$

α) Αν $A \cup B = X$ ν.δ.ο. $\bar{A} \cup B^o = X$

(κι ομοίως $A^o \cup \bar{B} = X$)

β) Αν $A \cap B = \emptyset$ ν.δ.ο. $\bar{A} \cap B^o = \emptyset$

(ομοίως $A^o \cap \bar{B} = \emptyset$)

Αποδ.

α) Εφόσον $A \cup B = X$

Έχουμε $X \setminus B \subseteq A$.

άρα $\overline{X \setminus B} \subseteq \bar{A}$

εφόσον $\overline{X \setminus B} = X \setminus B^o$ προκύπτει: $X \setminus B^o \subseteq \bar{A}$.

άρα $\bar{A} \cup B^o = X$

β) Εφόσον $A \cap B = \emptyset$.

προκύπτει ότι $A \subseteq X \setminus B$ άρα $\bar{A} \subseteq \overline{X \setminus B}$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq X \setminus B^o \Rightarrow \bar{A} \cap B^o = \emptyset$.